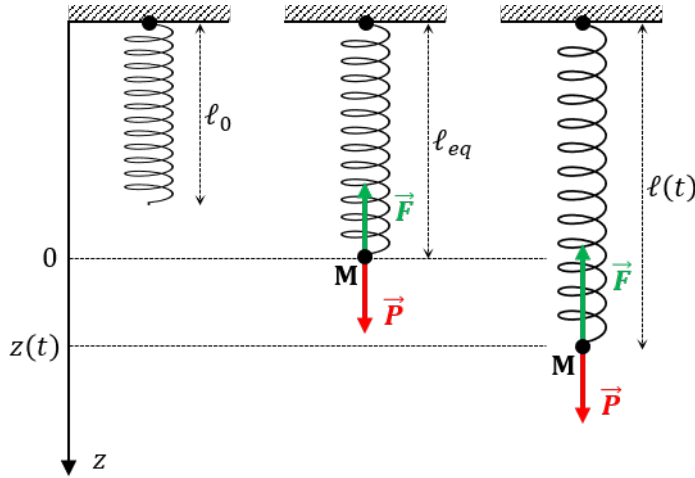


Ex. n°1 • Masse ressort à la verticale

☆☆☆ 4262

1)



2) On a : $\ell(t) = \ell_{eq} + z(t)$

3) La masse est soumise à :

○ Son poids : $\vec{P} = mg \vec{u}_z$

○ La force de rappel du ressort : $\vec{F}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_z$

On applique le PFD au point M de masse m , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen. On projette le PFD sur l'axe (Oz) et on se place à l'équilibre.

$$0 = mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) \Rightarrow \ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

4) On fait de même pour un temps quelconque :

$$m\ddot{z} = mg - k(\ell_{eq} + z(t) - \ell_0) = -kz(t) \Rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z(t) = 0 \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ex. n°2 • Masse ressort à l'horizontale

☆☆☆ 2711

1) Bilan des forces : force de rappel du ressort (le poids et la réaction normale du support se compensent). Ainsi, comme dans le cours :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_0 \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) On a : $x(0^+) = \ell_0$ et $\dot{x}(0^+) = -v_0$

3) Solution générale :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0$$

Avec les CI :

$$x(0^+) = A + \ell_0 = \ell_0 \Rightarrow A = 0$$

Et :

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{x}(0^+) = B\omega_0 = -v_0$$

Au bilan,

$$x(t) = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

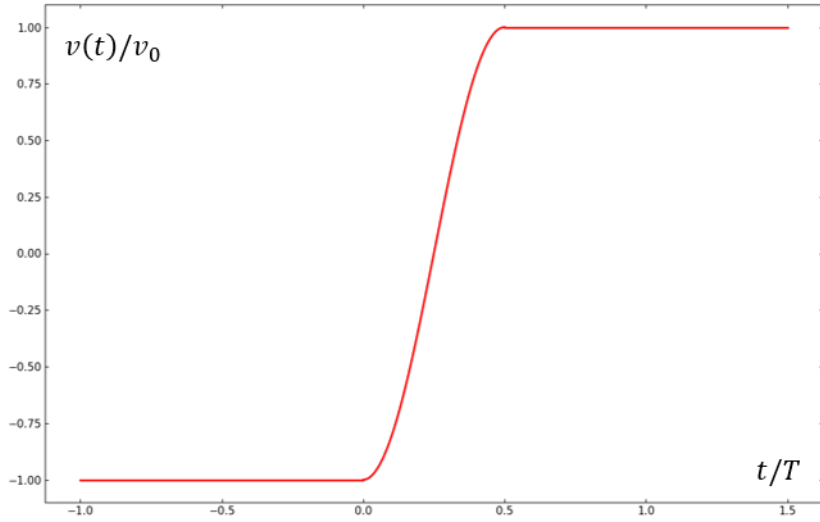
4) La longueur minimale est obtenue lorsque le sin est maximal, donc : $\ell_{min} = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0}$

On remarque que cette valeur peut être négative, ce qui n'a pas de sens physiquement. En pratique, si $\ell_{min} < 0$, cela signifie que la masse va entièrement comprimer le ressort puis se heurter au mur. Dans la suite, on se place donc dans le cas où $\ell_{min} > 0$.

5) Tant que la masse est en contact avec le ressort :

$$v(t) = -v_0 \cos(\omega_0 t)$$

Avant contact, $v(t) = -v_0$. Après contact, $v(t) = v_0$.



POUR ALLER PLUS LOIN

Ex. n°3 • Deux ressorts en dérivation

★★☆ 1425

1) Bilan des forces. La masse m est soumise à :

- La force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_1 = -k_1 (\ell_1 - \ell_{01}) \vec{u}_x$
- La force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_2 = k_2 (\ell_2 - \ell_{02}) \vec{u}_x$

On applique le PFD à l'équilibre à la masse m , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$0 = -k_1 (\ell_{1,eq} - \ell_{01}) + k_2 (\ell_{2,eq} - \ell_{02})$$

2) Un schéma montre immédiatement que :

$$\ell_1(t) = \ell_{1,eq} + x(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) = \ell_{2,eq} - x(t)$$

3) On applique le PFD :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1 (\ell_1(t) - \ell_{01}) + k_2 (\ell_2(t) - \ell_{02}) \\ &= -k_1 (\ell_{1,eq} + x(t) - \ell_{01}) + k_2 (\ell_{2,eq} - x(t) - \ell_{02}) \\ &= -k_1 x(t) - k_2 x(t) \end{aligned}$$

On en déduit l'ED du mouvement :

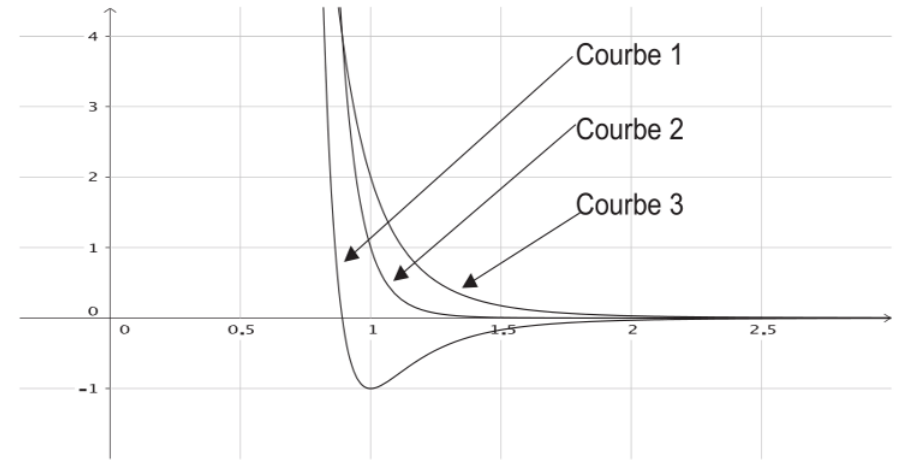
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

4) L'analogie du ressort est le condensateur. Or, deux condensateurs en dérivation ont une capacité équivalente : $C_{eq} = C_1 + C_2$. C'est bien ce que l'on retrouve ici : deux ressort en dérivation ont une constante de raideur équivalente : $k_{eq} = k_1 + k_2$.

Ex. n°4 • Potentiel de Lennard-Jones

★★☆ 2452

1) L'allure de $V(x)$ est donnée par la courbe 1.



Le terme A/x^{12} (courbe 2) domine lorsque $x \rightarrow 0$. Il correspond à des interactions répulsives entre les nuages électroniques des particules prépondérantes à courte distance.

Le terme $-B/x^6$ (opposée de la courbe 3) domine lorsque $x \rightarrow \infty$. Il correspond aux interactions attractives de Van der Waals prépondérantes à grande distance.

2) On cherche x tel que :

$$V'(x) = -\frac{12A}{x^{13}} + \frac{6B}{x^7} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = \left(\frac{2A}{B}\right)^{1/6}$$

3) L'**approximation harmonique** consiste à approximer $\mathcal{E}_p(x)$ pour x proche de x_{eq} par un polynôme d'ordre 2 (ie. une parabole). Cette approximation est donnée par la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}_p(x) \simeq \mathcal{E}_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \mathcal{E}'_p(x_{eq}) + \frac{1}{2} (x - x_{eq})^2 \mathcal{E}''_p(x_{eq})$$

Il s'agit d'une position d'équilibre : $\mathcal{E}'_p(x_{eq}) = 0$; stable (car un minimum) : $\mathcal{E}''_p(x_{eq}) = k > 0$.

$$\mathcal{E}_p(x) \simeq \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$$

On en déduit :

$$k = V''(x_{eq}) = \frac{V_0}{x_{eq}^2} (12 \times 13 - 2 \times 6 \times 7) = \frac{72V_0}{x_{eq}^2}$$

Ex. n°5 • Potentiel de Morse

★★★ 4287

1) La position d'équilibre correspond à un minimum de l'énergie potentielle et vérifie donc l'équation :

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

Ainsi,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{du} \times \frac{du}{dx} = -2V_0(1-u) \times -au = 2aV_0u(1-u) = 0 \Rightarrow x_{eq} = x_0$$

De manière équivalente, on peut remarquer que $V(x) \geq 0$. Or, $V(x_0) = 0$. Donc x_0 correspond au minimum de la fonction. On aboutit à la même conclusion : $x_{eq} = x_0$

2) L'**approximation harmonique** consiste à approximer $\mathcal{E}_p(x)$ pour x proche de x_{eq} par un polynôme d'ordre 2 (ie. une parabole). Cette approximation est donnée par la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}_p(x) \simeq \mathcal{E}_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \mathcal{E}'_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2 \mathcal{E}''_p(x_{eq})$$

Il s'agit d'une position d'équilibre : $\mathcal{E}'_p(x_{eq}) = 0$; stable (car un minimum) : $\mathcal{E}''_p(x_{eq}) = k > 0$.

$$\mathcal{E}_p(x) \simeq \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$$

Ici, $V(x_0) = 0$ et

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx} (2aV_0(u - u^2)) = \frac{du}{dx} \times \frac{d}{du} (2aV_0(u - u^2)) = -au \times 2aV_0(1 - 2u)$$

Ainsi,

$$V(x) \simeq \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad \text{avec : } k = V''(x_0) = 2a^2V_0$$

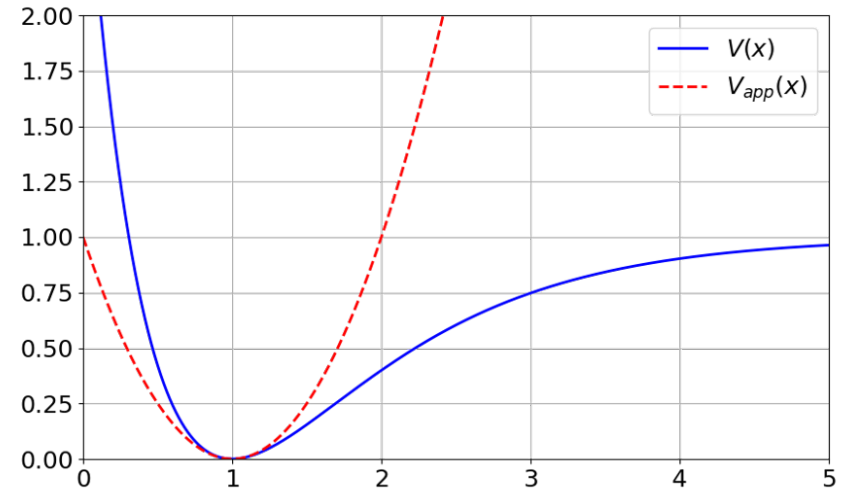
De manière équivalente, on peut faire directement le DL à l'ordre 2. Pour $x \simeq x_0$, on a :

$$u \simeq 1 - a(x - x_0) \Rightarrow 1 - u \simeq a(x - x_0) \Rightarrow V(x) = a^2V_0(x - x_0)^2$$

Par identification :

$$\mathcal{E}_p(x) \simeq \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 \Rightarrow V(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad k = 2a^2V_0$$

3)



Ex. n°6 • Deux ressorts en série

★★★ 2699

1) On a :

$$x_N(t) = \ell_1(t) \quad \text{et} \quad x(t) = \ell_1(t) + \ell_2(t)$$

2) Bilan des forces. Le point N est soumis à :

- La force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_1 = -k_1(\ell_1 - \ell_0) \vec{u}_x$
- La force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_2 = k_2(\ell_2 - \ell_0) \vec{u}_x$

On applique le PFD au point N de masse nulle, dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$0 = -k_1(\ell_1(t) - \ell_0) + k_2(\ell_2(t) - \ell_0)$$

On en déduit :

$$0 = -k_1 (x(t) - \ell_2(t) - \ell_0) + k_2 (\ell_2(t) - \ell_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_2(t) = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x(t) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \ell_0}$$

3) Le point M est soumis uniquement à la force de rappel du ressort 2 :

$$\vec{F}_2 = -k_2 (\ell_2 - \ell_0) \vec{u}_x$$

On applique le PFD au point M de masse m , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$m\ddot{x} = -k_2 (\ell_2(t) - \ell_0) = -k_2 \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2} x(t) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \ell_0 - \ell_0 \right)$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \cdot 2\ell_0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \quad \text{avec :} \quad k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

4) L'analogie du ressort est le condensateur. Or, deux condensateurs en série ont une capacité équivalente :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

Remarque : la position d'équilibre de la masse m vaut : $\ell_{eq} = 2\ell_0$. Elle ne dépend que du choix de l'origine de repère.

POUR S'ENTRAÎNER AU DS

Ex. n°7 • Molécule diatomique



8548

1) La masse m_1 est soumise uniquement à la force de rappel du ressort

$$\vec{F}_1 = k (x_2(t) - x_1(t) - \ell_0) \vec{u}_x$$

On applique le PFD sur m_1 , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 = k (x_2(t) - x_1(t) - \ell_0)}$$

2) La masse m_2 est soumise uniquement à la force de rappel du ressort

$$\vec{F}_2 = -k (x_2(t) - x_1(t) - \ell_0) \vec{u}_x$$

On applique le PFD sur m_2 , dans le référentiel du laboratoire que l'on suppose galiléen.

$$\boxed{m_2 \ddot{x}_2 = -k (x_2(t) - x_1(t) - \ell_0)}$$

3) On a :

$$\ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_2} (u(t) - \ell_0) - \frac{k}{m_1} (u(t) - \ell_0)$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 \ell_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}}$$

D'après les conditions initiales, $u(0) = d$. On en déduit :

$$\boxed{u(t) = (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t) + \ell_0}$$

4) D'après les questions 1 et 3, et à l'aide des conditions initiales, on a :

$$\ddot{x}_1 = \frac{k}{m_1} (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1(t) = \frac{\mu}{m_1} (d - \ell_0) (1 - \cos(\omega_0 t))}$$

D'après les questions 2 et 3, et à l'aide des conditions initiales, on a :

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2} (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2(t) = d - \frac{\mu}{m_2} (d - \ell_0) (1 - \cos(\omega_0 t))}$$